mechanics and its applications **524**, 708-721 (2019).

[5] Dabney, W.; Ostrovski, G.; Silver, D.; Munos, R. *Implicit quantile networks for distributional reinforcement learning an international conference on machine learning,*, 1096-1105, (2018).

[6] Tagasovska, N.; Lopez-Paz, D. *Single-model uncertainties for deep learning advances in neural information processing systems*, 6417-6428, (2019).

[7] Brando, A.; Rodriguez-Serrano, J. A.; Vitria, J.; Muñoz, A. R. *Modelling heterogeneous distributions with an uncountable mixture of asymmetric laplacians advances in neural information processing systems*, 8836-8846, (2019).

[8] Rather, A. M.; Agarwal, A.; Sastry, V. Recurrent neural network and a hybrid model for predictionof stock returns. *Expert systems with applications* **42**, 3234-3241 (2015).

[9] Sezer, O. B.; Gudelek, M. U.; Ozbayoglu, A. M. Financial time series forecasting with deep learning: A systematic literature review: 2005–2019. *Applied soft computing* **90**, 106181 (2020).

[10] Vovk, V.; Gammerman, A.; Shafer, G. *Algorithmic learning in a random world* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2005).

[11] Shafer, G.; Vovk, V. A tutorial on conformal prediction. *Journal of Machine Learning Research* **9** (2008).

Matemàtiques i art

El congrès *Bridges* de connexions matemàtiques

Josep Tarrés Turon, enginyer
Montse Alsina, UPC

Briges: Mathematical connections in art, music and science és el congrés anual de referència mundial en art i matemàtiques en un sentit ampli, ja que connecta matemàtiques amb art, música, arquitectura i cultura.

Origen i abast del congrés

Bridges va néixer dels congressos d'art i matemàtiques organitzats anualment del 1992 al 1997 per Nat Friedman, matemàtic i escultor, a la Universitat Estatal d'Albany, a l'estat de Nova York. A partir d'allà, el 1998 Friedman va formar la Societat Internacional de les Arts, les Matemàtiques i l'Arquitectura (ISAMA) i el primer congrés Isama es va fer a Sant Sebastià l'any següent, el 1999. D'altra banda, aquell mateix 1998 es van dur a terme sis conferències de matemàtiques i art, inclosa la primera conferència Bridges organitzada per Reza Sarhangi a Winfield, a l'estat de Kansas. Des d'aleshores ha tingut lloc en diferents ciutats d'Europa, Amèrica del Nord i Àsia, amb participants de més de 30 països.

El congrés té una part de conferències plenàries, ponències i tallers, a partir de la qual s'editen anualment les actes del congrés, que trobareu al web `https://www.bridgesmathart.org`.

Des del 2001, incorpora una exposició d'obres d'art relacionat amb matemàtiques, anomenada "Mathematical art galleries". Al llarg dels anys, els artistes s'han inspirat en les matemàtiques de fractals, poliedres, geometria no-euclidiana i quatre dimensions, mosaics, teoria de nusos, teoria de nombres, etc. La increïble gamma de materials, tècniques i conceptes és una mostra visible de l'amplitud i la profunditat de les matemàtiques i les seves aplicacions. Els artistes professionals exhibeixen la seva obra al costat de matemàtics i d'altres amb una formació artística menys formal.

En el marc del congrés, també s'hi organitzen esdeveniments ben variats relacionats amb art i matemàtiques, com ara un festival de curtmetratges, presentacions de moda, teatre, poesia, etc. Tot plegat en un ambient que defuig l'a-

cademicisme rígid i potencia les interrelacions. En les diferents edicions de Bridges hi han participat artistes i acadèmics d'arreu del món, alguns de ben coneguts en recerca matemàtica, com Noam D. Elkies i John Conway.

Trobareu una descripció de les últimes edicions, dutes a terme virtualment el 2020 i 2021, a l'article d'Eve Torrence "Building virtual bridges everywhere: A report on the 2020 and 2021 Bridges online conferences", *EMS Magazine* 2021.

Participació catalana

En aquest escrit volem centrar-nos en la presencia catalana en aquest congrés, sobretot en els darrers anys.

En la part d'articles, destaquen les contribucions catalanes a l'edició de Bridges 2019 a Linz. Així, a les actes es publiquen treballs de Bernat Espigulé (UB), *Una família d'arbres complexos ternaris semblants a les falgueres*; Lali Barrière (UPC), *Explorant l'atzar en l'art digital*, i també l'article conjunt *Art i matemàtiques mitjançant un tetraedre igualment enllaçat*, de Josep Tarrés, Luis Sanchez-Cuenca (UdG), Manuel Moreno (UPC) i Toni Vinyes.

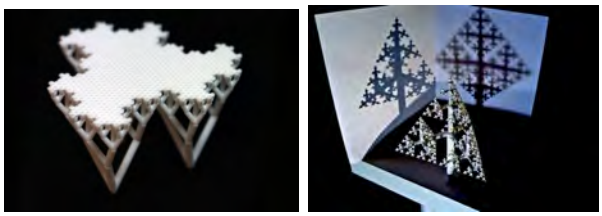
Tanmateix, ens centrarem en la part d'exposició d'obres d'art matemàtic (*Mathematical art galleries*), on destaca des del 2016 el constant testimoni de Josep Rey Nadal, del MMACA. Des del 2019, s'ha incrementat la presència d'artistes amb caràcter acadèmic, com Bernat Espigulé; artistes establerts a Catalunya, com Ligia Unanue, o el sotasignant Josep Tarrés, enginyer que conceptualitza l'art matemàtic. Aquest 2021 s'hi han incorporat també Jofre Adzerias i Joan Esparreguera.

A continuació descrivim algunes obres seleccionades per la galeria d'art del congrés aquests darrers anys, prenent com a referència les paraules dels seus autors a l'exposició virtual.

La *Taula de flocs i l'Arbre tetraèdric* són dues obres de Bernat Espigulé, seleccionades al Bridges 2019.

La *Taula de flocs* és un arbre complex ternari $T\{\frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}\}$ representat en 3D com una taula de tres potes, que es pot utilitzar per enrajolar el pla. Va ser creat per primera vegada amb Mathematica i imprès en 3D per Shapeways el 2013 com a regal a Robert Fathauer en relació amb la seva escultura de ceràmica *Three-fold development*, un disseny fractal que comparteix la mateixa geometria. Una variant d'aquest arbre es troba a la placa 73 del llibre de Benoit Mandelbrot *La geometria fractal de la natura* com un arbre fractal que s'omple de plànol anomenat "floc de floc". Com a arbre complex (vegeu `https://arxiv.org/abs/1902.11282`) és estructuralment inestable, el seu revers és un reflex de si mateix i la dimensió fractal del seu conjunt és $D = \frac{\log(\frac{1}{3})}{\log(\frac{1}{\sqrt{3}})} = 2$.

L'*Arbre tetraèdric* és un arbre quaternari especial, creat el 2012 amb Mathematica i imprès en 3D el 2013 per Shapeways. El seu conjunt té una dimensió fractal sencera, $D = \frac{\log(\frac{1}{4})}{\log(\frac{1}{\sqrt{2}})} = 2$, que es pot apreciar mirant l'arbre quadrat $T\{\frac{i}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{i}{2}, -\frac{1}{2}\}$ projectat per la seva ombra. La seva creació va estar motivada en part per una escultura de tetraedre de Sierpinski amb esferes metàl·liques feta per Susanne Krömker, cap del Grup de Visualització i Geometria Numèrica (IWR). L'arbre tetraèdric és una versió 3D de l'arbre ternari amb un conjunt de puntes de triangle de Sierpinski, $T\{\frac{(-1+i\sqrt{3})}{4}, \frac{1}{2}, \frac{-1-\frac{i}{\sqrt{3}}}{4}\}$. Aquest fet va portar les ambaixades de Polònia a atribuir erròniament el seu inici al matemàtic polonès Waclaw Sierpinski, i el 2015 es van crear diverses còpies a gran escala de l'arbre.

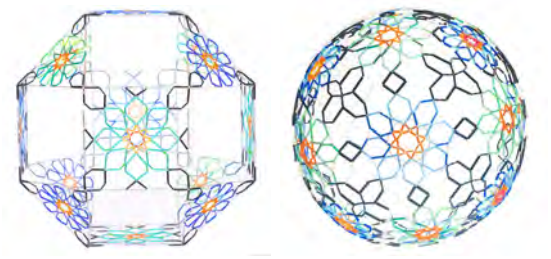


Taula de flocs i Arbre tetraèdric, de B. Espigulé

Bernat Espigulé és investigador matemàtic a la Universitat de Barcelona i consultor tecnològic. Combina la recerca amb la construcció d'animacions i escultures impreses en 3D, tallers i visites escolars. Espigulé està interessat a explotar la noció d'arbre complex per abordar problemes no resolts en el camp de la dinàmica complexa i col·laborar a desenvolupar la teoria de l'anàlisi sobre fractals. Les seves investigacions sobre la teoria d'arbres complexos estan disponibles a `www.ComplexTrees.com` i les se-

ves obres d'art en 3D estan disponibles a `www.shapeways.com/shops/complextrees`.

Nebulosa A *1702* i *Planeta* T *2768* estan creades per Ligia Unanue i també formen part de l'exposició de Bridges 2019.



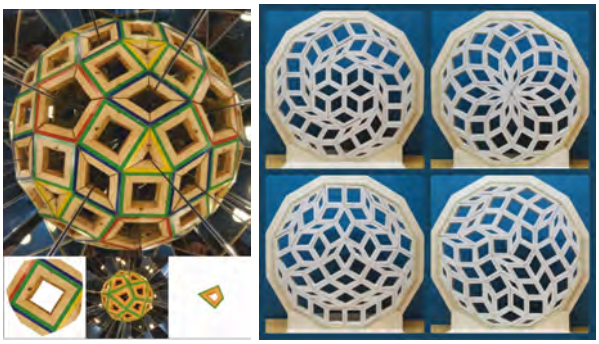
Nebulosa A *1702* i *Planeta* T, de L. Unanue

Nebulosa A *1702* no és un cub, no és una esfera; es troba en un pas intermedi. Les cares buides, subtils i etèries representen el pas del dens, estàtic i pesat del cub a l'esfericitat. Els triangles l'han alliberat de les cantonades de 90º, però tot i això, no s'ha pogut alliberar dels eixos. És un rombicuboctaedre. Té 6 quadrats i 8 triangles amb dissenys de patrons geomètrics de l'art nassarita de l'Alhambra de Granada. Els quadrats tenen les estrelles de vuit puntes, i els triangles, les de nou. Està totalment fet a mà amb 1.702 tubs de vidre de 14 mides diferents, des de 5 mm fins a 32 mm, i moltes hores.

Planeta T *2768* és l'etapa següent, una versió esfèrica del rombicuboctaedre. L'autora va utilitzar com a mètode una esfera en què dibuixava coordenades, com explica ella mateixa."Vaig marcar els punts dels vèrtexs dels 18 quadrats i 8 triangles d'aquest poliedre i vaig obtenir les formes arquejades de les bases del quadrat i del triangle. En aquestes formes vaig estudiar les mesures i els colors dels 2.768 tubs de vidre, perquè els dissenys d'estrelles de vuit i nou puntes donessin forma simètrica a l'esfera. Amb aquest mateix mètode, qualsevol poliedre pot ser esfèric i aquest és el meu nou projecte".

Ligia Unanue és una artista xilena que resideix a Barcelona. Durant diversos anys, ha centrat el seu treball en el desenvolupament de sòlids platònics i arquimedians, i hi ha afegit un punt de complexitat aplicant a les cares dels polígons els motius dels patrons geomètrics de l'art nassarita de l'Alhambra de Granada, la qual cosa l'ha portat a esferificar els poliedres. La construcció dels poliedres es fa íntegrament a mà i amb tubs de vidre com a material principal. Amb aquesta experiència ha estat descobrint mètodes empírics per al càlcul, les mesures i les proporcions, amb solucions innovadores.

Homenatge a H.S.M. Coxeter i *Enreixat dodecagonal interactiu* són obres de Josep Rey Nadal, seleccionades a les edicions 2020 i 2021 de Bridges, respectivament.



Homenatge a H.S.M. Coxeter i *Enreixat dodecagonal interactiu*, de J. Rey

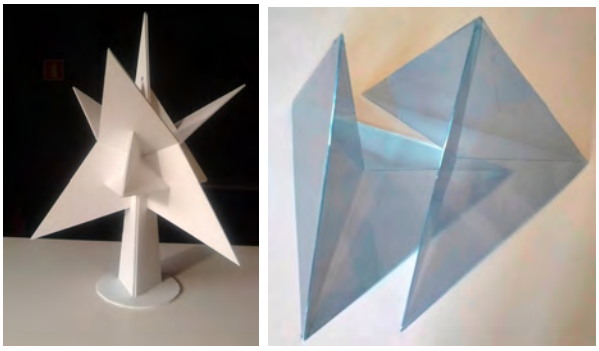
Homenatge a H.S.M. Coxeter, és una escultura creada amb fusta de xiprer i un calidoscopi. Amb una peça, formada per un quadrat, un terç d'un triangle, una cinquena part d'un pentàgon i dos quarts de rombe daurat introduït en un calidoscopi, que la repeteix 60 vegades, es forma una figura que l'autor bateja amb el nom *deltoidirhombicosidodecaedre*, amb 122 cares. El calidoscopi deltoidal es construeix amb dos calidoscopis mínims de Coxeter. La fusta de les peces comença crua a la part central de cada polígon i s'afina fins que queda acolorida a la vora. És un camí des de l'harmonia irregular fins a la regular. L'estètica s'inspira en els dibuixos de Leonardo da Vinci. Amb aquest calidoscopi podem crear els poliedres amb simetria icosaèdrica i també podríem veure l'hexecontaedre deltoidal a partir d'un deltoide simple.

Enreixat dodecagonal interactiu és un trencaclosques vertical, que cal començar des de la part inferior utilitzant el sentit de l'equilibri. L'objectiu és teixir el dodecàgon amb 60 peces. 24 rombes amb un angle agut de 30º, 24 rombes amb un angle agut de 60º i 12 quadrats. Té la particularitat del repte que suposa la verticalitat i la bella estètica resultant. Un cop construït, es pot observar la simetria del

rosetó creat. Hi ha diverses solucions possibles i es convida a pensar com es poden comptar totes.

Josep Rey Nadal és un matemàtic, artista i professor jubilat, que dedica bona part del seu treball a la creació de mòduls interactius per al Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA). Creu que els mòduls han de ser suggeridors estèticament i emocionalment, perquè el visitant tingui ganes d'actuar manipulant i pensant matemàticament. L'objectiu és atraure els sentits innats i el coneixement interioritzat, per construir ponts entre matemàtiques, art i educació.

Starnari del tetraedre i *Pentacoró disseccionat*, són obres de Josep Tarrés Turon, que formen part de les edicions Bridges 2020 i 2021, respectivament.



Starnari del tetraedre i *Pentacoró disseccionat*, de J. Tarrés

L'*Starnary del tetraedre* és una estrella 3D nidificada en un tetraedre. El seu centre és compartit amb tots els 6 triangles. Cada un té un vèrtex en una aresta del tetraedre i els altres 2 vèrtexs al centre de les 2 cares oposades. Per a més informació, hi ha la comunicació *Art and math using an equally linked tetrahedron*, de Bridges 2019, i el treball en curs sobre geometria enllaçada igualitàriament. L'escultura geomètrica està feta amb làmines de polièster de color blanc.

L'escultura *Pentacoró disseccionat* és, en paraules del mateix Tarrés, "una proposta de partició del pentacoró en 2 formes polièdriques iguals formades per 2 tetraedres. El pentacoró (5 cel·les, 4 símplexs) està format per 5 tetraedres, units cada un als altres 4 per les seves cares, 10 triangles (cares), 10 arestes i 5 vèrtexs; la primera projecció de vèrtex és una representació 3D amb un vèrtex al centre. La dissecció té diverses característiques: per exemple, totes les vores són accessibles perquè ja no hi ha vores interiors; tanmateix, no es mostren 2 cares (no són accessibles). Aquesta maqueta es podria utilitzar com a eina didàctica".

Josep Tarrés és una persona molt interessada en enginyeria aplicada a STEM. S'ha involucrat en la creació d'objectes que tinguin un fons geomètric no només amb contingut matemàtic educatiu, sinó també amb aplicacions industrials, però amb la voluntat que siguin bells per ser atractius per a tothom.

Valnà, de J. Adzerias, i *Katerina*, de J. Esparraguera

Valnà, seleccionada a Bridges 2021, és una escultura tubular, com descriu el mateix autor, Jofre Adzerias: "És una autoestructura feta de paper perquè, després de col·lapsar-se, el full tubular pugui suportar una càrrega tant vertical com horitzontal. El disseny, fet sobre una quadrícula 4x4, distribueix les corbes proporcionalment, i fa que funcionin amb l'aplicació de càrregues. A part de tot això, el que realment ha estat un treball extraordinari i satisfactori és descobrir l'elevació de les línies en espiral, que ha donat a la peça una gran bellesa i moviment".

Jofre Adzerias, de Girona, és co-fundador de Vidalfont Paper i es dedica a l'ofici de plegar paper (origami), i presenta elements decoratius i articles de regal al públic.

Katerina, seleccionada també a Bridges 2021, és una tessel·lació inspirada en el moviment de l'aigua, obra de Joan Esparraguera. És una combinació d'espais còncaus i convexos a partir d'una composició regular de cercles connectats per tangents. L'autor diu: "M'encanta poder

expressar amb un sol paper una part de la vida que m'envolta. La mateixa natura".

Joan Esparraguera, de Cervià de Ter, és també co-fundador de Vidalfont Paper. Observador i creatiu, amb alguns estudis d'enginyeria, atret per la interrelació de les formes amb les matemàtiques, s'ha convertit en un gran fan de la papiroflèxia, i crea i exposa nous dissenys.

Altres actors i mirada al futur

A l'entorn català també hi ha altres actors que interrelacionen art i matemàtiques, ja siguin artistes, matemàtics o entitats, com es mostra al llarg dels números de la revista en els diversos articles d'aquesta secció d'art i matemàtiques, els quals us convidem a rellegir. El tema d'art i matemàtiques també va ser present al congrés Matrix 2018, trobada internacional de museus de matemàtiques d'arreu del món organitzada pel MMACA i el Museu Nacional de Matemàtiques de Nova York (MoMath). Pel que fa a altres museus de Catalunya, el CosmoCaixa ha donat veu a artistes de Bridges com Rinus Roelofs; pel que fa a exposicions, cal destacar també la recent "Escher", al Museu Marítim, a les Drassanes de Barcelona.

L'anunci del Barcelona Hub d'Art, Ciència i Tecnologia a l'espai del Palau Alfons XIII (Fira de Barcelona) obre noves perspectives. Tot plegat permet endevinar un futur ben prometedor en relació amb l'art i les matemàtiques. Tant de bo això ajudi a promoure la potencial candidatura de Bridges Barcelona.

La propera edició del congrés, es durà a terme presencialment l'agost del 2022, a la Universitat d'Aalto, Finlàndia. Consulteu els terminis per presentar article, obres d'art i curtmetratges a: `https://www.bridgesmathart.org/b2022/`.

Matemàtiques, llengua i societat

Matemàtiques i divulgació

Quim Frigola
col·laborador de Ciència Oberta i estudiant del grau de Matemàtiques, UAB

Recordo una de les primeres classes del grau de Matemàtiques en les quals el professor de càlcul ens va explicar el teorema de diagonalització de Cantor i que els conjunts infinits no tenen el mateix nombre d'elements. Aquella tarda, al tren de tornada a casa, esperava poder explicar a algú el resultat sorprenent i captivador que havia après al matí.

Al final, la majoria dels que hem pogut copsar en algun moment la bellesa de les matemàtiques volem compartir-la amb els que ens envolten. Explicar-los per què ens agrada passar hores i hores intentant entendre teoremes o esforçant-nos per resoldre un problema.

Amb la pandèmia actual hauria de quedar clara la necessitat d'explicar bé les coses. La desinformació va creixent i més gent desconfia de les vacunes o creu que no és important confinar-se. Per això la tasca de divulgador és igual d'important que la d'investigador. Tot i així, sembla que a vegades ens oblidem que no estem sols fent ciència.

Amb les noves tecnologies, sobretot amb internet, va néixer una nova manera de divulgar, amb la capacitat d'arribar a un públic completament nou. Així, per exemple, en matemàtiques apareix el canal de YouTube anglès Numberphile, que ràpidament es fa molt popular. Altres canals de gran qualitat com 3Blue1Brown o el canal de Matt Parker el segueixen.

De seguida van començar a aparèixer aquestes noves formes de divulgació també en castellà. En l'àmbit de les matemàtiques trobem el canal de YouTube Derivando, però també molts d'altres com la Hiperactina o Quantum Fracture, de biomedicina i física, respectivament. Ràpidament, totes aquestes noves plataformes comencen a tenir un èxit important. El públic jove (i no tan jove) vol consumir aquest nou contingut de divulgació i entreteniment. A la